COLETÂNEA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO (*)

NÍVEL I (ENSINO FUNDAMENTAL: 5ª e 6ª Séries)

***PROBLEMA* 1**

Numa loteria, todos os prêmios em reais são potências de 13 (isto é, R$ 1,00, R$ 13,00, R$ 169,00 etc.) e o prêmio total é de R$ 1.000.000,00.
Num sorteio, qual é o número mínimo possível de prêmios distribuídos?

PROBLEMA 2

Numa escola, estudantes inventaram uma máquina que “tritura” frações. A máquina funciona do seguinte modo: se introduzimos uma fração **F**, ela devolve a fração $\dfrac{1-F}{1+F}$.

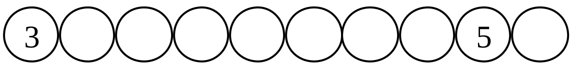
Por exemplo: se introduzimos na máquina a fração $\dfrac{1}{5}$, sai a fração $\dfrac{1-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}} = \dfrac{2}{3}$.

Um dos estudantes colocou na máquina a fração $\dfrac{1}{5}$. Em seguida, a fração resultante foi novamente colocada na máquina, obtendo-se uma outra fração; o novo resultado foi colocado na máquina e, assim por diante, até que a máquina completou 2001 “triturações”.

Que fração apareceu no final?

PROBLEMA 3

Escreva um número em cada círculo da fila abaixo, de modo que a soma de três números quaisquer vizinhos (consecutivos) seja 12.



Que número deve estar escrito no último círculo à direita?

PROBLEMA 4

Em uma urna há 28 bolas azuis, 20 bolas verdes, 12 bolas amarelas, 10 bolas pretas e 8 bolas brancas.
Qual é o número mínimo de bolas que devemos sacar dessa urna para termos certeza que sacaremos pelo menos 15 bolas da mesma cor?

PROBLEMA 5

Um jogo consiste de 9 botões luminosos (de cor verde ou vermelho) dispostos num quadrado da seguinte maneira:

1″ 2″ 3″

4″ 5″ 6″

7 ″ 8 ″ 9 ″

Apertando-se um botão do bordo do quadrado, muda a cor da luz dele e de cada um dos os vizinhos (isto é, se a cor da luz do botão é vermelha, torna-se verde, e vice-versa). Apertando-se o botão do centro, muda a cor da luz de todos os 8 vizinhos, mas a dele não se altera.

Apertando-se sucessivamente alguns botões, é possível acender todas as luzes com cor verde, se inicialmente estavam todas acesas com a cor vermelha?

PROBLEMA 6

Como o médico me recomendou caminhadas, todo dia de manhã dou uma volta (com velocidade constante) na quadra em que resido. Minha mulher aproveita para correr (com velocidade constante) em volta do quarteirão. Saímos juntos e chegamos juntos. Ela percorre a quadra no mesmo sentido que eu e me ultrapassa duas vezes durante o percurso. Se ela corresse no sentido contrário ao meu, quantas vezes ela cruzaria comigo?

PROBLEMA 7

No edificio mais alto de *Terra Brasilis* moram *Eduardo* e *Augusto*. O número do andar do apartamento de Eduardo coincide com o número do apartamento de *Augusto*. A soma dos números dos apartamentos dos dois é 2164.

Calcule o número do apartamento de *Eduardo* sabendo que há 12 apartamentos por andar. *(Por exemplo, no primeiro andar estão os apartamentos de 1 a 12, no segundo, de 13 a 24, e assim por diante).*

PROBLEMA 8

São dados 98 cartões. Em cada um deles está escrito um dos números 1, 2, 3, …, 98 (não existem números repetidos). Pode-se ordenar os 98 cartões de tal modo que ao considerar dois cartões consecutivos a diferença entre o número maior e o número menor escritos neles seja sempre maior que 48.

Indicar como e de quantas formas é possível efetuar a ordenação.

PROBLEMA 9

Os adeptos do clube A. B. C. celebram, desde 1902 e de 5 em 5 anos, uma festa em honra do seu clube. Por sua vez, os adeptos do clube C. B. A. celebram, desde 1903 e de 7 em 7 anos, uma festa em honra do seu clube.

Quais os anos entre 1900 e 2002 em que coincidem as celebrações dos dois clubes?

PROBLEMA 10

Maria e João disputaram um jogo no qual são atribuídos 2 pontos por vitória e deduzido um ponto em caso de derrota, não sendo possível ocorrer empate. Inicialmente, cada um deles tinha 5 pontos.

Se João ganhou exatamente três partidas e Maria no final ficou com 10 pontos, quantas partidas disputaram?

PROBLEMA 11

Encontre todos os pares de inteiros positivos *(m, n),* com $m + n \leq 100$, e que satisfazem

$$\frac{m + n^{-1}}{m^{-1} + n} = 13 .$$

PROBLEMA 12

Branca de Neve distribuiu para os sete anões a sua colheita de cogumelos de 707 unidades. Começando pelo menor dos sete anões, e por ordem crescente das suas alturas, cada anão recebe mais um cogumelo do que o anão anterior.
Quantos cogumelos receberá o maior dos anões?

PROBLEMA 13

Corte 10 algarismos do número 1234512345123451234512345 para que o número restante seja o maior possível

PROBLEMA 14

Numa competição de ciclismo, Carlinhos dá uma volta completa na pista em 30 segundos, enquanto que Paulinho leva 32 segundos para completar uma volta.
Quando Carlinhos completar a volta número 80, Paulinho estará completando a volta de que número?

PROBLEMA 15

João quer desfazer-se de sua coleção de 1.000 bolinhas. Para tanto escolhe dez garotos da rua onde mora. Dá ao primeiro garoto x bolinhas, ao segundo $x + 1$ bolinhas. Assim faz até chegar ao décimo garoto. Sempre dá uma bolinha a mais para o próximo garoto. No final, João ainda fica com um resto de bolinhas.
Se x é o número que deixa João com o menor resto possível, qual é o valor de x?

PROBLEMA 16

Em 2001, o custo de produção de N caixas de bananas foi de r reais. Pelo aperfeiçoamento dos métodos de produção, no ano 2002 o custo de N + 1000 caixas foi de $r - 5000$ reais.
(a) Calcule o preço por caixa em 2001 e em 2002.
(b) Calcule quanto mais barato foi o custo por caixa em 2002.

PROBLEMA 17

Uma cooperativa agrícola semeou na primeira semana, $\frac{5}{18}$ de um terreno dedicado a semeadura de trigo. Na segunda semana semeou $\frac{8}{27}$, na terceira semana $\frac{12}{31}$ da superfície semeada nas duas primeiras semana e na quarta semana, 40 hectares menos do que na primeira semana.
Determinar a superfície semeada em cada semana.

PROBLEMA 18
Para cada uma das 31 galinhas, preparou-se um decalitro de comida por semana. Isto foi feito supondo que o número de galinhas fosse invariável. Como diminuía uma galinha por semana, a comida durou o dobro do tempo planejado.
Que quantidade de comida foi preparada e para quanto tempo foi planejada?

PROBLEMA 19
Considere os números obtidos repetindo-se sucessivamente 1988: 1988, 19881988, 198819881988, 1988198819881988, ...
Em que passo aparece, pela primeira vez, um múltiplo de 126?

PROBLEMA 20
Em quanto o sono não vinha, Plácido viu dez carneirinhos pularem a cerca, o que levou exatamente 10 minutos.
Se a insônia prosseguir e os carneirinhos continuarem no mesmo ritmo, quantos pularão em 1 hora?

PROBLEMA 21
Escreva em ordem crescente os seguintes números inteiros 2^{5555}, 3^{3333}, 6^{2222}.
Justifique sua resposta.

PROBLEMA 22
Sara escreveu no quadro negro um número inteiro de menos de trinta algarismos e que termina em 2. Célia apaga o 2 do fim e escreve-o no início. O número que fica é igual ao dobro do número que tinha escrito Sara.
Qual é o número que Sara escreveu?

PROBLEMA 23
Temos três caixas, uma azul, uma branca e uma vermelha, e 8 bolinhas. Cada bolinha tem um número de 1 a 8, sem repetições. Distribuímos as 8 bolinhas nas caixas, de maneira que há pelo menos duas bolinhas em cada caixa. Logo, em cada caixa, somam-se todos os números escritos nas bolinhas contidas na caixa. Os três resultados denominam-se soma azul, soma branca e soma vermelha, segundo a cor da caixa correspondente. Encontre todas as possíveis distribuições das bolinhas tais que a soma vermelha seja igual ao dobro da soma azul, e a soma vermelha menos a soma branca seja igual à soma branca menos a soma azul.

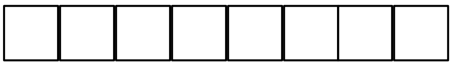
PROBLEMA 24
Utilizando exclusivamente números primos forma-se um conjunto com as seguintes condições:
1- Qualquer número primo de um algarismo pode estar no conjunto.
2- Para que um número primo de mais de um algarismo esteja no conjunto, devem estar no conjunto o número que se obtém ao suprimir-lhe só o primeiro algarismo e também o número que se obtém ao suprimir-lhe só o último algarismo.

Determine, entre conjuntos que cumpram estas condições, aquele que tem maior quantidade de elementos. Justifique por que não pode haver um com mais elementos.
(*Lembre-se de que o número 1 não é primo*).

PROBLEMA 25

Num tabuleiro de 8 casas, como na figura abaixo, há inicialmente uma ficha em cada casa. Uma jogada consiste em escolher duas fichas e mover uma delas uma casa à direita e a outra, uma casa à esquerda.

Se depois de 4 jogadas as 8 fichas estão distribuídas somente em 2 casas, determine quais podem ser estas casas e quantas fichas há em cada uma delas.



PROBLEMA 26

Um alfaiate tem um grande pedaço de tecido. Ele resolve dividir o pedaço de tecidos em 5 pedaços. Em seguida, escolhe *alguns* desses pedaços e corta cada um deles em cinco pedaços. Do total dos pedaços de tecidos resultante, o alfaiate escolhe, novamente, *alguns* deles e corta cada um em cinco pedaços.

Continuando desse modo, o alfaiate pode obter 2002 pedaços de tecido?

PROBLEMA 27

Vinte pessoas compareceram a um baile. Maria dançou com sete rapazes; Olga com oito; Vera com nove e, assim por diante, até que Nina dançou com todos eles. Quantos rapazes havia na festa?

PROBLEMA 28

Três corredores, X, Y e Z, participam de uma corrida. Na saída, Z teve problemas, partindo em último lugar, enquanto Y foi o segundo. Durante a corrida, Z mudou de posição 6 vezes com os outros corredores, enquanto X mudou 5 vezes. Sabe-se que no final Y chegou na frente de X.

Qual foi a ordem de chegada dos três corredores?

PROBLEMA 29

Quinze elefantes estão dispostos numa linha. Seus pesos são expressos com números inteiros de quilogramas. A soma do peso de cada elefante (exceto aquele da extrema direita) com o dobro do peso do seu vizinho à direita é igual 15 toneladas.

Determine o peso de cada elefante.

PROBLEMA 30

O número 123 é mostrado na tela de um computador. A cada minuto o computador soma 102 ao número que está na tela. Sempre que desejar, Misha, um expert em programação, pode mudar a ordem dos algarismos do número que aparece na tela.

Explique como ele pode garantir que nenhum número de 4 algarismos aparecerá na tela.

RESPOSTAS

PROBL	RESPOSTA	PROBL	RESPOSTA	PROBL	RESPOSTA
1	16	11	Existem 7 pares	21	3^{3333}, 2^{5555}, 6^{2222}
2	2/3	12	104	22	105263157894736842

3	3	13	553451234512345	23	Existem 13 soluções distintas
4	59	14	75	24	{2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73, 373}
5	Não	15	95	25	Existem 4 soluções possíveis
6	4	16	*(a)r/N; e (r-5000)/N+1000 (b) A diferença entre os dois números obtidos em (a)*	26	Não
7	1997	17	150, 160, 120, 110	27	13
8	Existem duas maneiras distintas de efetuar a ordenação	18	496 dal para 16 semanas	28	Y, X, Z
9	1917, 1952, 1987	19	Nono	29	Cada elefante pesa 5000 kg.
10	7	20	60	30	Veja onde e como ele pode alterar a ordem dos algarismos dos números que aparecem no visor.

(*) Os problemas foram compilados das provas de diversas olimpíadas de matemática: Olimpíada Brasileira de Matemática, Olimpíada de Maio, Olimpíada de Matemática do Cone Sul, Olimpíada Iberoamericana de Matemática, da Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte, de Olimpíadas Regionais e de listas de problemas de matemática na INTERNET.